

## 应考方略

数学有数

样的命题有效地避免了题海战术,真正地考查了考生应用知识的能力。

**解析:** (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2}$ . 设  $g(x) = -x^2 + ax - 1$ , 而函数  $g(x) = -x^2 + ax - 1$  的图像开口向下, 恒过定点  $(0, -1)$ ,  $\Delta = a^2 - 4$ .

(i) 当  $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$  时, 即  $-2 \leq a \leq 2$  时,  $g(x) = -x^2 + ax - 1 \leq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f'(x) \leq 0$  在  $(0, +\infty)$  恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减.

(ii) 当  $\Delta = a^2 - 4 > 0$  时, 即  $a > 2$  或  $a < -2$  时, 由  $g(x) = -x^2 + ax - 1 = 0$ , 即  $f'(x) = 0$  解得  $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ , 由  $g(x) = -x^2 + ax - 1 = 0$  可知:  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$ , 当  $a < -2$  时,  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$ , 因此可得  $f'(x) < 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减. 当  $a > 2$  时, 由  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$  可得  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , 因此可得当  $x \in (0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}) \cup (\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$  时,  $f'(x) > 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ ,  $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$  单调递减, 在  $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$  单调递增.

综上所述, 当  $a \leq 2$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减; 当  $a > 2$  时,  $f(x)$  在  $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$  和  $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$  上单调递减, 在  $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$  单调递增.

(2) **解析 1:** 当  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$  时, 由 (1) 可知当  $a > 2$  时,  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立, 而由 (1) 可知:  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$ , 不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立, 等价于证明  $f(x_1) - f(x_2) > (a - 2)(x_1 - x_2)$  成立, 即证明  $f(x_1) - (a - 2)x_1 > f(x_2) - (a - 2)x_2$ , 其中  $x_1, x_2$  是方程  $g(x) = -x^2 + ax - 1 = 0$  的两个根, 设函数  $h(t) = f(t) - (a - 2)t$ , 则满足  $-t^2 + at - 1 = 0$ , 即可  $t + \frac{1}{t} = a$ ,  $h'(t) = f'(t) - (a - 2) = -\frac{1}{t^2} - 1 + a \cdot \frac{1}{t} - (a - 2) = -\frac{1}{t^2} - 1 + (t + \frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t} - (t + \frac{1}{t} - 2) = 2 - (t + \frac{1}{t})$ , 由 (1) 可知当  $a > 2$  时,  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 所以  $t + \frac{1}{t} = a > 2$ , 所以  $h'(t) = 2 - (t + \frac{1}{t}) < 0$ ,  $h(t) = f(t) - (a - 2)t$  在  $(0, +\infty)$  单调递减, 又因为  $x_2 > x_1 > 0$ , 所以  $h(x_2) < h(x_1)$ , 即  $f(x_1) - (a - 2)x_1 > f(x_2) - (a - 2)x_2$ , 因此可得  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ , 不等式得证.

**解析 2:** 当  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$  时, 由 (1) 可知

当  $a > 2$  时,  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立, 而由 (1) 可知:  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$ , 不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立, 等价于证明  $f(x_1) - f(x_2) > (a - 2)(x_1 - x_2)$  成立, 由  $x_1 x_2 = 1$  可得  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ , 即只需证明  $f(x_1) - f(\frac{1}{x_1}) > (a - 2)(x_1 - \frac{1}{x_1})$ ,

即证  $\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - (x_1 - \frac{1}{x_1} + a \ln \frac{1}{x_1}) > (a - 2)(x_1 - \frac{1}{x_1})$ , 化简可得  $2a \ln x_1 + a(\frac{1}{x_1} - x_1) > 0$ , 再由  $a > 2$ , 因此只需证  $2 \ln x_1 + (\frac{1}{x_1} - x_1) > 0$  成立即可, 设函数  $h(t) = 2 \ln t + (\frac{1}{t} - t)$ , 由 (1) 可知  $0 < x_1 < 1$ , 即  $0 < t < 1$ , 因此得  $h'(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - 1 = -\frac{(t - 1)^2}{t^2} < 0$ , 所以  $h(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 又因为  $h(1) = 0$ , 所以  $h(t) > h(1) = 0$ , 所以得  $2 \ln x_1 + (\frac{1}{x_1} - x_1) > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立,

即  $f(x_1) - f(x_2) > (a - 2)(x_1 - x_2)$ , 因此可得  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立.

**解析 3:** 由 (1) 可知只有当  $a > 2$  时,  $f(x)$  才有两个极值点  $x_1, x_2$ , (不妨设  $0 < x_1 < x_2$ ), 因此可得:  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$ , 所

以有  $x_2 > 1$ , 因此有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - \frac{1}{x_2} + x_2 - a \ln x_2}{x_1 - x_2} = a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} - 2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立, 即可证明  $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1$  成立, 而  $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{x_2}{x_1} < x_2 - x_1 \Leftrightarrow \ln x_2^2 < x_2 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0$  成立, (同样, 在这里可以考虑将  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - \frac{1}{x_2} + x_2 - a \ln x_2}{x_1 - x_2} = a \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} - 2 = \frac{a}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_1}{x_2} - 2$ , 要证明  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立等价于证明  $\frac{a}{x_1 - x_2} \ln \frac{x_1}{x_2} - 2 < a - 2$ , 即证明  $\ln \frac{x_1}{x_2} > x_1 - x_2$ , 所以只需证明  $\ln x_1^2 > x_1 - \frac{1}{x_1}$  成立, 即证明  $2 \ln x_1 - x_1 + \frac{1}{x_1} > 0$  成立, 下面构造函数和以下一样, 过程略) 令  $h(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t}$  ( $t > 1$ ),  $h'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t - 1)^2}{t^2} < 0$ , 故  $h(t)$  在  $(1, +\infty)$  递减, 从而  $h(t) < h(1) = 0$ , 则有  $2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0$  成立, 所以  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$  成立.

**解析 4:** 由 (1) 可知只有当  $a > 2$  时,  $f(x)$  才有两个极值点  $x_1, x_2$ , (不妨设  $0 < x_1 < x_2$ ), 并且由韦达定理可得:  $x_1 + x_2 = a$ ,  $x_1 x_2 = 1$ ,

所以有  $x_2 > 1$ , 因此有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 - \frac{1}{x_2} + x_2 - a \ln x_2}{x_1 - x_2} =$